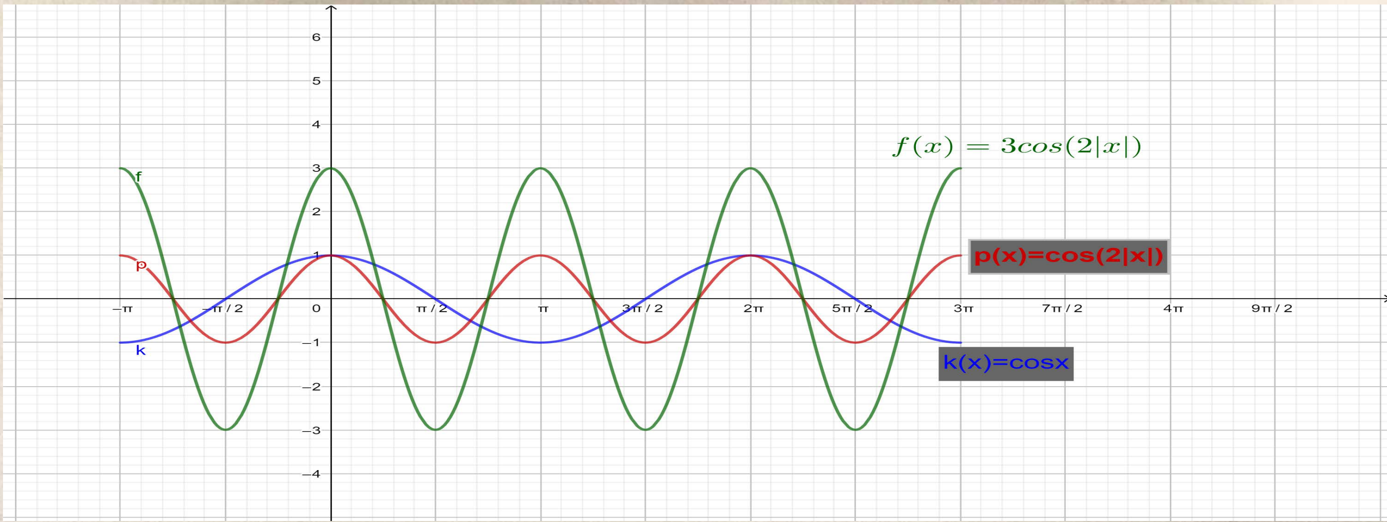
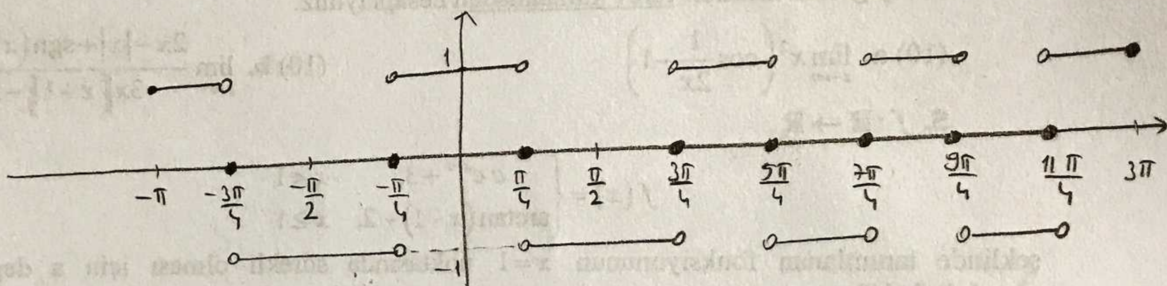


$$g(x) = \operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < -\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4} < x \le 3\pi \\ 0, & x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \\ -1, & -\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{4} \end{cases}$$



$$h(x) = \left[\!\left[\frac{f(x)}{3} \right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{3\cos 2|x|}{3} \right]\!\right] = \left[\!\left[\cos 2|x| \right]\!\right]$$

$x = -\pi \Rightarrow h(x) = 1 \quad (\cos 2|x| = 0)$

$-\pi < x \le -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow h(x) = 0 \quad (0 < \cos 2|x| < 1)$

$-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow h(x) = -1 \quad (-1 < \cos 2|x| < 0)$

$-\frac{\pi}{4} \le x < 0 \Rightarrow h(x) = 0 \quad (0 < \cos 2|x| < 1)$

$x = 0 \Rightarrow h(x) = 1$

$0 < x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow h(x) \quad (0 < \cos 2|x| < 1)$

$x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow h(x) = 0$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -1 < \cos 2|x| < 0 \Rightarrow h(x) = -1$

$\frac{3\pi}{4} \le x < \pi \Rightarrow 0 < \cos 2|x| < 1 \Rightarrow h(x) = 0$

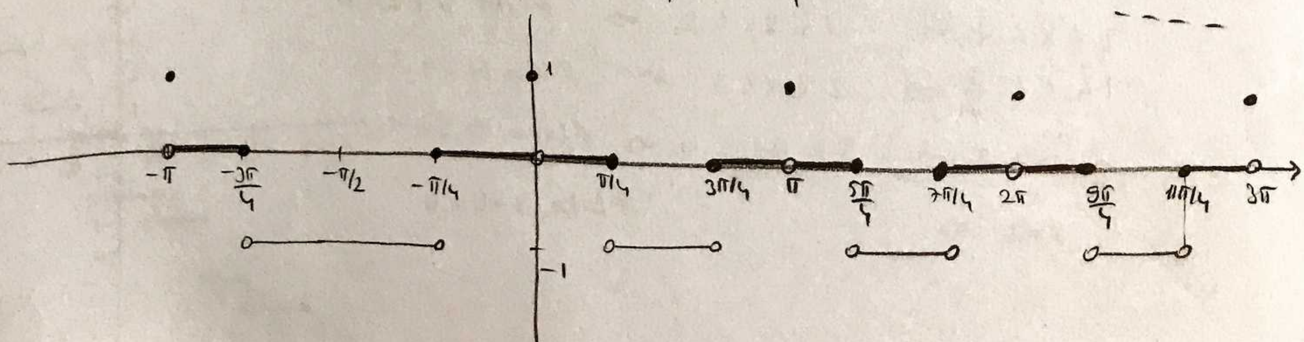
$x = \pi \Rightarrow h(x) = 1$

$\pi < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow 0 < \cos 2|x| < 1 \Rightarrow h(x) = 0$

$x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow h(x) = 0$

$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -1 < \cos 2|x| < 0 \Rightarrow h(x) = -1$

- - -



3) $2x-3>0$ ... (1) $\Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$x^2-3x+2\geq 0$ ... (2) $\Rightarrow \underbrace{x\leq 1 \text{ ve } 2\leq x \text{ olmalı.}}_{x\geq 2 \text{ olmalı.}}$

$x-\sqrt{x^2-3x+2}>0$ --- (3)

$\log(2x-3)-\log\left(x-\sqrt{x^2-3x+2}\right)\geq 0$ --- (4)

(3) ifadesinden $x\geq 2$ için $x^2\geq x^2-3x+2$ ve $x\geq\frac{2}{3}$ olmalı. Buna göre ilk (3) koşulun ortak çözümü $\boxed{x\geq 2}$ dir. --- (5)

(4) den logaritmanın monotonluk özelliğinden dolayı

$2x-3>x-\sqrt{x^2-3x+2} \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+2}\geq 3-x$

$\Rightarrow 3x-7\geq 0$

$x\geq\frac{7}{3}$ --- (6)

(5) ve (6) dan Ç.K $=\left[\frac{7}{3},+\infty\right)$ bulunur.

4) a) $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f(-x) = 2+3e^{-|-x|} = 2+3e^{-|x|} = f(x)$$

olduğundan f bir çift fonksiyondur.

b) $f(x) = 2+3e^{-|x|}$ fonksiyonunda $h(x) = e^{-|x|}$ olsun.

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ e^{x}, & x<0 \end{cases}$$ yazılır.

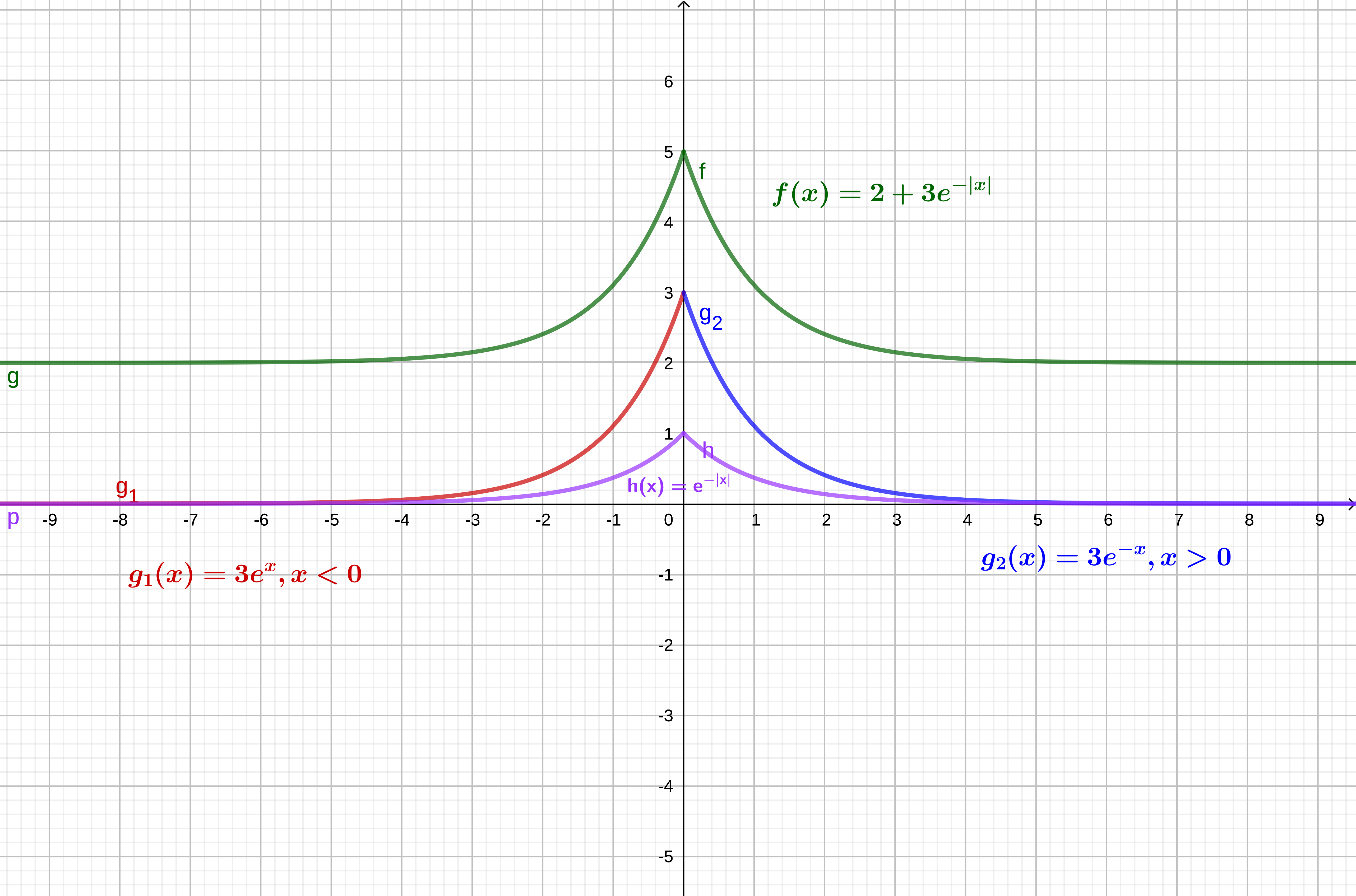
Yine f fonksiyonunda $g(x) = 3e^{-|x|}$ denirse

$$g(x) = 3e^{-|x|} = \begin{cases} 3e^{-x}, & x>0 \\ 3e^{x}, & x<0 \end{cases}$$

şeklinde olup, g fonksiyonunun grafiği, her bir h(x) değerinin 3 ile çarpılmasıyla elde edilir.

$f(x) = 2+3e^{-|x|}$ in grafiği ise g fonksiyonunun grafiğinin 2 br. yukarı kaydırılması ile çizilir.

c) f fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında monoton artan, $[0, +\infty)$ aralığında monoton azalandır.



$f(x) = 2 + 3e^{-|x|}$
f
g
g_2
g_1
h
$h(x) = e^{-|x|}$
p
$g_1(x) = 3e^{x}, x < 0$
$g_2(x) = 3e^{-x}, x > 0$

① $f: X \to Y$ fonksiyonu 1-1 olsun. O zaman herhangi bir $E \subset X$ için $x \in E$ alındığında $f(x) \in f(E)$ olup $x \in f^{-1}(f(E))$ bulunur. Yani

$$E \subseteq f^{-1}(f(E)) \text{ ----- } (*)$$

dir. Öte yandan $\forall x \in f^{-1}(f(E))$ için $f(x) \in f(E)$ olup f birebir olduğundan $x \in E$ olur. Bu ise

$$f^{-1}(f(E)) \subseteq E \text{ ------ } (**)$$

demektir.

Sonuç olarak $E = f^{-1}(f(E))$ olur.

Tersine $E = f^{-1}(f(E))$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2$ olduğunda $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Bir $E \subset X$ için $x_1 \in E$, $x_2 \notin E$ alalım. Buradan $f(x_1) = f(x_2) \in f(E)$ olup $x_1, x_2 \in f^{-1}(f(E))$ yazılır. Bu ise $E \neq f^{-1}(f(E))$ demektir. Bu çelişki ile $x_1 \neq x_2$ olduğunda $f(x_1) \neq f(x_2)$ olup f birebir olur.

(5) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$P(n): \sqrt{2+\sqrt{2+ \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ olsun.

$n=1$ için $P(1): \sqrt{2} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ olup

$P(1)$ sağlanır.

$n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$P(k): \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+ \cdots + \sqrt{2}}}}_{k \text{ tane}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \text{ olsun.}$$

$n=k+1$ için

$$P(k+1): \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+ \cdots + \sqrt{2}}}}_{(k+1) \text{ tane}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} =$$

$$= \sqrt{2+2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) - 1\right]}$$

Kosinüs yarım açı formülü

$$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) \text{ olup } P(n)$$

önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanır.

(6)

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

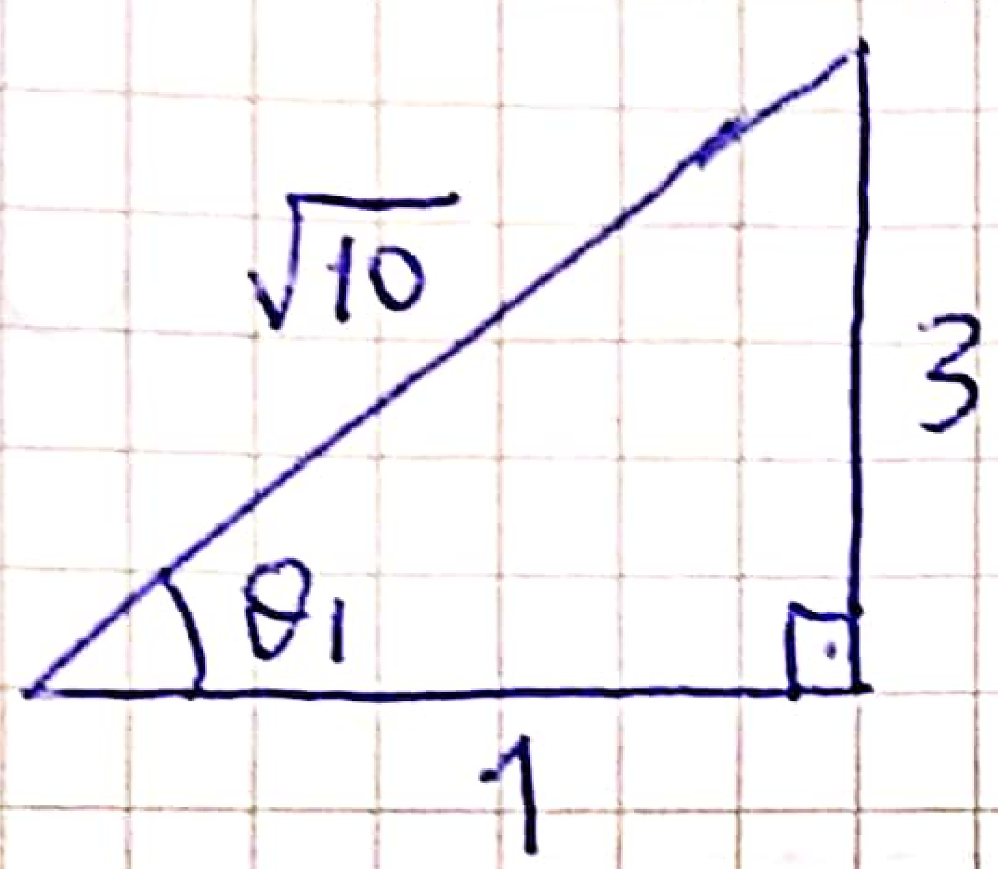
$\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \longrightarrow [0,\pi] \setminus \{\pi/2\}$

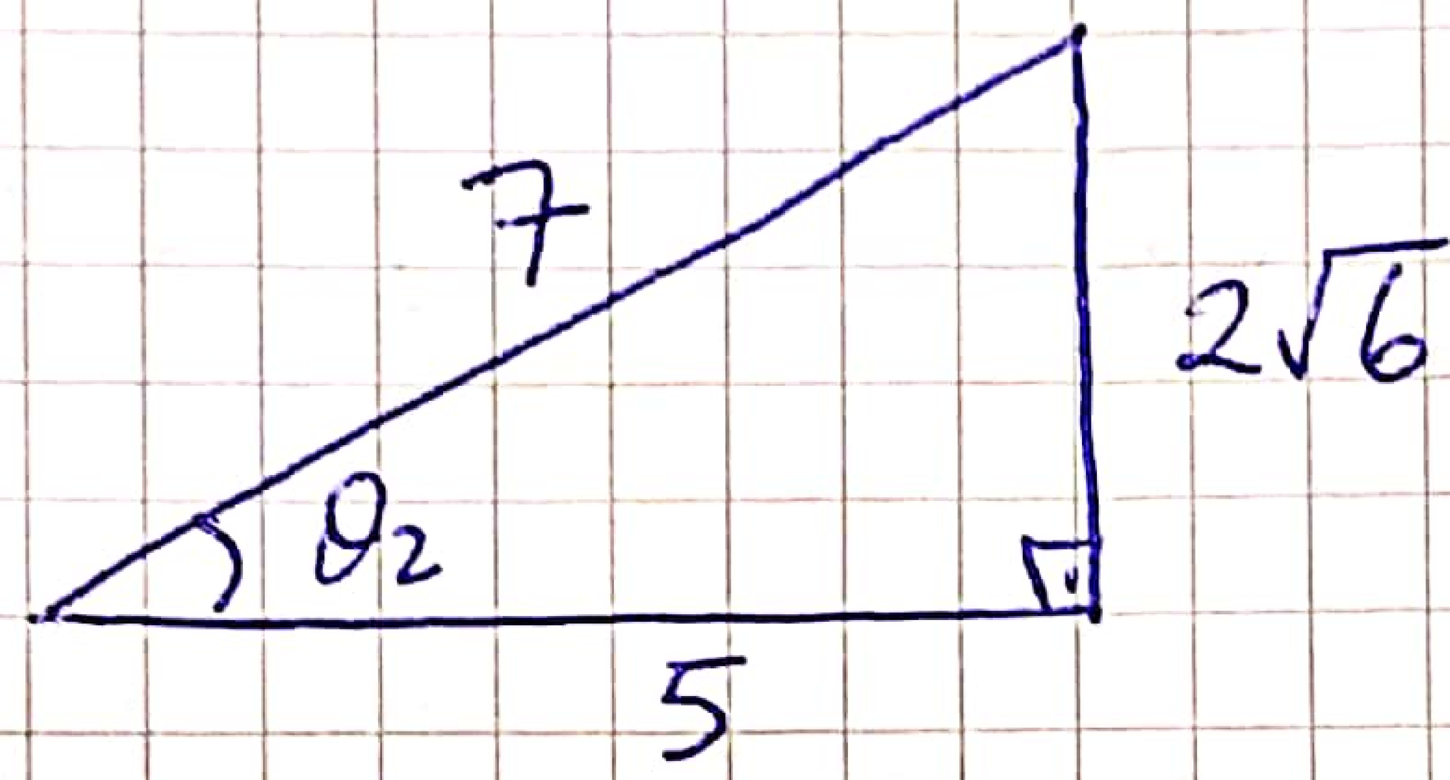
ve $\arcsin(\sin x) \neq x$ olması kullanılırsa

$\arctan(-3) = \theta_1$, $\operatorname{arcsec}\left(\frac{7}{5}\right) = \theta_2$ için

$\tan\theta_1 = -3$; $\theta_1 \in (-\pi/2, 0)$ ve

$\sec\theta_2 = 7/5$; $\theta_2 \in (0, \pi/2)$ olur.





olup $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta_1 = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta_2 = \frac{5}{7}$ ve

$\sin\theta_2 = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ bulunur. Öte yandan $\sin 12$

için esas ölçü $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığına denk

gelecek şekilde düzenlenirse

$\sin(12 \mp 2k\pi) = \sin 12$ old. dan

$\sin 12 = \sin(12-4\pi)$ olup

$12-4\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\arcsin(\sin 12) = \arcsin(\sin(12-4\pi))$

$= 12-4\pi$ bulunur. O zaman

$$\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{\arcsin(\sin 12)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{5}{7}+\frac{-3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}}{12-4\pi}$$

$$= \frac{5-6\sqrt{6}}{7\sqrt{10}(12-4\pi)}$$ olur.

CamScanner ile tarandı